Prednáška 2

2.1. Lineárne sústavy

Budeme uvažovať sústavu (1.6), kde $\mathbf{f}$ bude v tvare lineárnej funkcie. Systém zapíšeme skrátene

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(t)\,\mathbf{y} + \mathbf{b}(t), \tag{2.1}$$

kde funkcie $b_j(t)$ a koeficienty matice $\mathbf{A}(t) = (a_{jk}(t)) \in M_{n\times n}(\mathbb{C}),\ \ j,k = 1,2,\ldots,n$ sú spojité (vo všeobecnosti komplexné) funkcie na intervale $I \subset \mathbb{R}$. Ak $\mathbf{b} = 0$ hovoríme o homogénnej sústave prislúchajúcej systému (2.1). Nasledujúca veta nám hovorí o algebraickej štruktúre riešení tohoto diferenciálneho systému (2.1).

Veta 2.1.1.

Množina všetkých (vo všeobecnosti komplexných) riešení homogénneho systému prislúchajúcemu (2.1) tvorí n-rozmerný vektorový priestor.

Definícia 2.1.2.

Vektorové funkcie $\mathbf{h}^1,\ldots,\mathbf{h}^n$ definované na intervale I nazývame lineárne závislé v intervale I, akk existujú konštanty $c_1,\ldots c_n$, ktoré nie sú všetky rovné nule, také, že pre každé $t \in I$ platí

$$\sum_{i=1}^{n} c_i\,\mathbf{h}^i(t) = 0.$$

Ak funkcie nie sú lineárne závislé nazývame ich lineárne nezávislé.

Problém 2.1.3.

Zrejme $\mathbf{h}^1(t) = (e^{3t}, 2e^t)$ a $\mathbf{h}^2(t) = (2e^{3t}, 4e^t)$ sú lineárne závislé v $\mathbb{R}$. Ukážte to. Ukážte, že $\mathbf{h}^1(t) = (e^t, 0, 2e^t)$, $\mathbf{h}^2(t) = (e^{-t}, 3e^{-t}, 0)$, $h_1(t) = (e^{2t}, e^{2t}, e^{2t})$ sú lineárne nezávislé v $\mathbb{R}$.

Definícia 2.1.4.

Každú n-ticu $\mathbf{y}^1, \ldots, \mathbf{y}^n$ lineárne nezávislých riešení sústavy (2.1) nazveme fundamentálny systém riešení (FSR). Maticu, ktorej stĺpce tieto riešenia tvoria nazývame fundamentálna matica a označíme ju $\Phi(t)$.

Príklad 2.1.5.

Majme systém

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2, \\ y_2' &= -y_1. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Potom

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

je fundamentálna matica tohto systému.

Definícia 2.1.6.

Adjungovaná matica je transponovaná matica algebraických doplnkov (kofaktorov). Teda $\mathrm{adj}\mathbf{A} = \mathbf{C}^{\mathsf{T}}$, kde $C_{ij} = (-1)^{i+j}\det \mathbf{A}_{ij}$, kde $\mathbf{A}_{ij}$ je štvorcová matica, ktorú získame z matice $\mathbf{A}$ odstránením i-tého riadku a j-tého stĺpca.

Uvedieme si vyjadrenie derivácie determinantu matice $\mathbf{A}$ pomocou k nej adjungovanej matici a derivácie samotnej matice **A**. Keďže platí $\det \mathbf{A} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} C_{ki}$ pre ľubovoľné i, máme

$$\mathrm{d} \det \mathbf{A} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \det \mathbf{A}}{\partial a_{ij}} \, \mathrm{d}a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} C_{ji} \, \mathrm{d}a_{ij}.$$

Dostaneme tak nasledujúcu lemu.

Lema 2.1.7 (Jacobiho formula)**.**

Nech **A** je diferencovateľné zobrazenie z $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ (matica), potom $\mathrm{d} \det \mathbf{A} = \operatorname{tr}(\operatorname{adj} \mathbf{A} \, \mathrm{d}\mathbf{A})$.

Je známe, že ak je matica **A** regulárna, potom pre jej inverziu platí $\mathbf{A}^{-1} = \frac{\operatorname{adj} \mathbf{A}}{\det \mathbf{A}}$.

Dôsledok 2.1.8.

Nech **A** je diferencovateľná a invertovateľná na $I \subset \mathbb{R}$. Potom platí

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \det \mathbf{A} = (\det \mathbf{A}) \operatorname{tr}\left(\mathbf{A}^{-1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathbf{A}\right).$$

Nasledujúca veta nám vyjadruje determinant FSR homogénneho systému prislúchajúcemu (2.1) v tvare sumy diagonálnych prvkov koeficientov matice $\mathbf{A}(t)$. Jej dôsledok nám poslúži pri vyšetrovaní lineárnej závislosti či nezávislosti systému vektorových funkcií, ktoré sú riešeniami homogénneho systému diferenciálnych rovníc.

Veta 2.1.9 (Abelova-Liouvilleova formula)**.**

Nech $\Phi(t)$ je fundamentálna matica homogénneho systému prislúchajúcemu (2.1) na otvorenom intervale I, potom pre všetky $t, t_0 \in I$ platí

$$\det \Phi(t) = \det \Phi(t_0) \, \mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} \mathbf{A}(\xi) \, \mathrm{d}\xi}.$$

Tento vzťah má aj peknú geometrickú interpretáciu, opisuje totiž vývoj objemu rovnobežnostena generovaného počiatočnými vektormi $\mathbf{y}^1(t_0), \ldots \mathbf{y}^n(t_0)$.

Príklad 2.1.10 (Použitie Abelovej-Liouvilleovej formuly)**.**

Riešme na $I = (0, \infty)$ systém

$$\mathbf{y}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{x} \\ 1 + x & -1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}(x)} \mathbf{y},$$

Predpokladajme, že sme jedno riešenie

$$\mathbf{y}^1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}, \qquad x \in I,$$

už našli. Potom z toho, že $\operatorname{tr} \mathbf{A}(x) = 0$ pre $x \in I$ a každý vektor fundamentálnej matice

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} y_1^2(x) & 1 \\ y_2^2(x) & x \end{pmatrix}, \qquad x \in I,$$

rieši náš systém, máme $c_1 := \det \Phi(x) = x\, y_1^2(x) - y_2^2(x),\ x \in I$. Z toho však máme $(y_1^2)'(x) = \frac{c_1}{x}$, teda $y_1^2(x) = c_1 \ln x + c_2,\ x \in I$ a navyše $y_2^2(x) = c_1 x \ln x + c_2 x - c_1,\ x \in I$. Voľba $c_1 = 1$ a $c_2 = 0$ nám dáva lineárne nezávislé riešenie a tak

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \ln x & 1 \\ x \ln x - 1 & x \end{pmatrix}, \qquad x \in I,$$

je hľadané fundamentálne riešenie.

Dôsledok 2.1.11.

Ak $\det \Phi(t_0) \neq 0$, tak $\det \Phi(t) \neq 0\ \forall\, t \in I$. Ak $\det \Phi(t_0) = 0$, tak $\det \Phi(t) \equiv 0$.

Poznámka 2.1.12.

Všimnime si, že $\det \Phi(t)$ je vlastne Wronského determinant (wronskián) riešení daného systému (podobne ako pre rovnice vyšších rádov). Z dôsledku vyplýva, že ak je wronskián riešení daného systému nenulový v jednom bode intervalu I, potom je nenulový na celom intervale, čo znamená, že tieto riešenia sú lineárne nezávislé v I.

Princíp superpozície sa vo fyzike objavuje často a na mnohých miestach – od kvantovej mechaniky až po elektromagnetizmus. Vo všeobecnosti hovorí to, že ak sú rovnice popisujúce skúmaný fyzikálny systém lineárne a vezmeme nejaké dve riešenia, tak aj lineárna kombinácia týchto riešení (túto nazývame aj superpozícia) je tiež riešením.

Veta 2.1.13 (Princíp superpozície)**.**

1. Ak sú $\mathbf{y}^j$ riešením sústav

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(t)\,\mathbf{y} + \mathbf{b}^j(t), \ \ j = 1, 2,$$

potom pre ľubovoľné čísla α, β je $\alpha\,\mathbf{y}^1 + \beta\,\mathbf{y}^2$ je riešením sústavy

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(t)\,\mathbf{y} + \alpha\,\mathbf{b}^1 + \beta\,\mathbf{b}^2,$$

2. Ak je $\mathbf{y}_p$ partikulárne riešenie sústavy (2.1), potom všeobecné riešenie tejto sústavy je

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_p + \sum_{j=1}^{n} c_j\,\mathbf{y}^j,$$

kde $\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \ldots, \mathbf{y}^n$ je FSR príslušnej homogénnej sústavy a $\mathbf{c}$ sú ľubovoľné konštanty.

Teraz treba ešte vyriešiť otázku, ako získame partikulárne riešenie $\mathbf{y}_p$, ak máme FSR. Odpoveď dáva znovu, (podobne ako u lineárnych diferenciálnych rovníc vyšších rádov) metóda variácie konštánt. Partikulárne riešenie $\mathbf{y}_p(t)$ nehomogénneho systému (2.1) na intervale I hľadáme v tvare $\mathbf{y}_p(t) = \Phi(t)\,\mathbf{c}(t)$. Našou úlohou je nájsť funkcie $\mathbf{c}(t)$. Pri dosadzovaní funkcie $\mathbf{y}_p$ do rovnice, ktorej má vyhovovať sa riadime tým, že pre operáciu derivovania súčinu matíc platí rovnaké pravidlo ako pre derivovanie súčinu funkcií. Takže po dosadení máme

$$\Phi'(t)\mathbf{c}(t) + \Phi(t)\mathbf{c}'(t) = \mathbf{A}(t)\Phi(t)\mathbf{c}(t) + \mathbf{b}(t).$$

Keďže vieme, že pre FSR platí $\Phi'(t) = \mathbf{A}(t)\Phi(t)$ a existuje matica $\Phi^{-1}(t)$, dostaneme implikáciu

$$\Phi(t)\mathbf{c}'(t) = \mathbf{b}(t) \Rightarrow \mathbf{c}(t) = \int \Phi^{-1}(t)\mathbf{b}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Takže máme hľadané partikulárne riešenie $\mathbf{y}_p(t) = \Phi(t)\int \Phi^{-1}(t)\mathbf{b}(t)\,\mathrm{d}t$.

Veta 2.1.14 (Variácia konštánt)**.**

Nech $\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \dots, \mathbf{y}^n$ je FSR homogénnej sústavy príslušnej k (2.1), potom pre každé spojité $\mathbf{b}$ existujú také funkcie $c_1(t), c_2(t), \dots, c_n(t)$, že funkcia

$$\mathbf{y} = \sum_{j=1}^{n} c_j(t)\,\mathbf{y}^j$$

rieši (2.1)

Dôsledok 2.1.15 (Riešenie nehomogénnej lineárnej rovnice)**.**

Riešenie začiatočnej úlohy

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = \mathbf{A}(t)\,\mathbf{y} + \mathbf{b}(t), \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}^0 \end{cases}$$

má tvar

$$\mathbf{y} = \Phi(t)\,\Phi^{-1}(t_0)\,\mathbf{y}^0 + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi(s)^{-1}\,\mathbf{b}(s)\,\mathrm{d}s \tag{2.3}$$

2.2. Systémy lineárnych diferenciálnych rovníc s konštantnými koeficientami

Majme systém 2.1, kde matica $\mathbf{A}(t)$ nezávisí na t a $\mathbf{b}(t) = 0$. Teda majme systém

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\,\mathbf{y}. \tag{2.4}$$

Pozrieme sa na metódu vlastných vektorov - výpočtu riešenia pomocou tzv. charakteristickej rovnice. Predpokladajme, že riešenie (2.4) je v tvare $\mathbf{y}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{h}$, $t \in I$, kde $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$ je reálny alebo komplexný vektor a λ je reálne alebo komplexné číslo. Po dosadení máme $\mathbf{y}' = \lambda e^{\lambda t}\mathbf{h} = e^{\lambda t}\,\mathbf{A}\mathbf{h}$, $\forall\, t \in I$. Teda $(\lambda\mathbf{I} - A)\mathbf{h} = \mathbf{0}$, $\forall\, t \in I$. Táto sústava má nenulové riešenie $\mathbf{h}$ iba vtedy, keď jej matica bude singulárna. Musí teda platiť

$$P(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0,$$

tj. tzv. charakteristický polynóm (stupňa n) pre diferenciálny systém (2.4) je rovný nule.

Veta 2.2.1 (Prípad navzájom rôznych vlastných hodnôt)**.**

Nech $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ $(\in \mathbb{C})$ sú navzájom rôzne vlastné hodnoty matice A, a $\mathbf{v}^i$ je vlastný vektor zodpovedajúci vlastnej hodnote λ_i, pričom $\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^n$ sú lineárne nezávislé. Potom FSR (vo všeobecnosti komplexný) diferenciálnej rovnice (2.4) má tvar $\mathbf{y}^i(t) = e^{\lambda_i t}\mathbf{v}^i$, $i = 1, \ldots, n$.

Poznámka 2.2.2.

Zrejme

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{\lambda_i t}\mathbf{v}^i, \quad C_i \in \mathbb{R}$$

je tvar všeobecného riešenia systému (2.4).

Tvrdenie vety 2.2.1 zostáva v platnosti aj v prípade komplexných koreňov. Problém je v tom, že riešenie je potom v komplexnom tvare. Je však možné skonštruovať z nich riešenia v reálnom tvare. Predpokladajme, že $\lambda = p + iq$ je koreňom charakteristickej rovnice s prislúchajúcim vlastným vektorom. Zrejme aj $\overline{\lambda} = p - iq$ je jej koreňom. Vieme, že $\mathbf{y}(t) = \mathbf{v}\,\mathrm{e}^{\lambda t}$ je riešením systému (2.4), ukážeme, že aj $\overline{\mathbf{y}}(t) = \overline{\mathbf{v}}\,\mathrm{e}^{\overline{\lambda} t}$ ním je. Vyplýva to priamo z toho, že $(\lambda\,\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \overline{(\lambda\,\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{v}} = \overline{\mathbf{0}} \Leftrightarrow (\overline{\lambda}\,\mathbf{I} - \mathbf{A})\overline{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$. Vzhľadom na linearitu priestoru riešení sú riešeniami aj všetky lineárne kombinácie funkcií $\mathbf{y}(t), \overline{\mathbf{y}}(t)$, teda aj funkcie

$$\mathfrak{Re}\,(\mathbf{y}(t)) = \frac{\mathbf{y}(t) + \overline{\mathbf{y}}(t)}{2}, \mathfrak{Im}\,(\mathbf{y}(t)) = \frac{\mathbf{y}(t) - \overline{\mathbf{y}}(t)}{2\mathrm{i}}.$$

Veta 2.2.3 (Prípad komplexných vlastných hodnôt)**.**

Nech $\lambda = \sigma + \mathrm{i}\,\omega$ je k-násobný koreň charakteristickej rovnice pre diferenciálnu rovnicu (2.4), tj. polynóm $P(\lambda) = \det(\lambda\,\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$, pričom k nemu existuje k lineárne nezávislých vlastných vektorov: $\mathbf{w}^j = \mathbf{g}^j + \mathrm{i}\,\mathbf{h}^j$, $j = 1, \dots, k$. Potom množina riešení tvaru $(\mathbf{a}\cos\omega t + \mathbf{b}\sin\omega t)\,\mathrm{e}^{\sigma t}$ je vektorový podpriestor množiny všetkých riešení dimenzie $2k$, pričom jeho báza je

$$\mathbf{p}^j(t) = (\mathbf{g}^j\cos\omega t - \mathbf{h}^j\sin\omega t)\,\mathrm{e}^{\sigma t},$$
$$\mathbf{r}^j(t) = (\mathbf{h}^j\cos\omega t + \mathbf{g}^j\sin\omega t)\,\mathrm{e}^{\sigma t}, \;\; j = 1, \dots, k. \tag{2.5}$$

O niečo komplikovanejší je postup v prípade násobných vlastných čísel. Vieme však, že každému násobnému vlastnému číslu musí zodpovedať presne toľko lineárne nezávislých riešení, aká je jeho násobnosť. Medzi nimi sa vždy vyskytuje aspoň jedno riešenie tvaru $\mathbf{h}\,\mathrm{e}^{\lambda t}$. Môžu však pribudnúť ďalšie riešenia, ktoré už tento tvar nemajú. Ak nastane situácia, že vlastný podpriestor prislúchajúci nejakej vlastnej hodnote nemá plnú dimenziu, musíme ju doplniť pomocou tzv. zovšeobecnených vlastných vektorov.

Definícia 2.2.4.

Nenulový vektor $\mathbf{v}$ sa nazýva zovšeobecnený vlastný vektor rádu p matice $\mathbf{A}$ prislúchajúci vlastnému číslu λ matice $\mathbf{A}$, ak existuje $p \in \mathbb{N}$ tak, že $(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I})^p\mathbf{v} = \mathbf{0}$ a $(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I})^{p-1}\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Usporiadanú $p-$ticu $(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \dots \mathbf{v}^p)$, $\mathbf{v}^k = (\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I})^{p-k}\mathbf{v}$, $k = 1, 2, \dots, p$ nazývame reťazec zovšeobecnených vlastných vektorov rádu p matice $\mathbf{A}$ vytvorený vektorom $\mathbf{v}$.

Poznámka 2.2.5 (O nulite matice)**.**

Počet lineárne nezávislých vlastných vlastných vektorov zodpovedajúcich násobnému číslu λ je rovný nulite (rozdiel $n - h(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})$) matice $\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}$.

Poznámka 2.2.6.

Platí $(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I})\mathbf{v}^1 = 0,\ (\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I})\mathbf{v}^2 = \mathbf{v}^1, \dots, (\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I})\mathbf{v}^{p-1} = \mathbf{v}^{p-2}, (\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I})\mathbf{v}^p = \mathbf{v}^{p-1}$.

Veta 2.2.7 (Prípad zovšeobecnených vlastných hodnôt)**.**

Nech $\left(\mathbf{v}^1, \dots \mathbf{v}^m\right)$ je reťazec zovšeobecnených vlastných vektorov matice $\mathbf{A}$ zodpovedajúci vlastnému číslu λ matice $\mathbf{A}$ vytvorený vlastným vektorom $\mathbf{v}$. Potom vektorové funkcie (vo všeobecnosti komplexné)

$$\mathbf{s}^k(t) = \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\mathbf{v}^i\, t^{k-i}}{(k-i)!}\right) \mathrm{e}^{\lambda\, t},\ k = 1, \dots, m$$

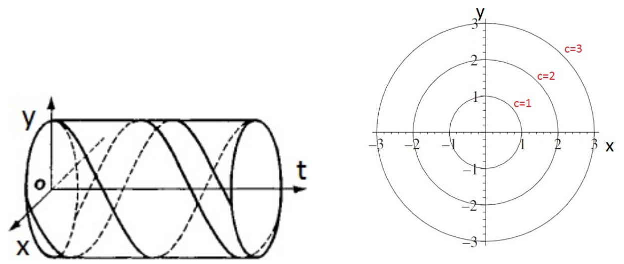
sú lineárne nezávislé riešenia rovnice (2.4).

Poznámka 2.2.8.

Vo všeobecnosti je FSR zjednotením všetkých množín lineárne nezávislých riešení zodpovedajúcich všetkým koreňom charakteristickej rovnice.

2.3. Prvé integrály sústav

Určiť riešenie diferenciálnych rovníc sa v podstate podarí len vo výnimočných prípadoch. Niekedy sa ale podarí urobiť malý krok: podarí sa nájsť takú funkciu $\Theta(t, \mathbf{y})$, ktorá je konštantná na každom riešení systému (1.6) (príslušná konštanta môže byť pre rôzne riešenia rôzna). Takýto postup nemusí byť však jednoduchý a je teda užitočný vtedy, ak iný nemáme. Také funkcie nazývame prvými integrálmi tejto sústavy, pričom často majú fyzikálny význam napríklad energie, hybnosti, momentu hybnosti (konštantnosť vyjadruje zákon zachovania týchto veličín).



(a) Cylinder tvorí prvý integrál (pre konkrétne c).

(b) Fázový portrét tvoria kružnice.

Obr. 2.1: Správanie sa riešení z príkladu 2.3.3.

Príklad 2.3.1.

Exemplárnym príkladom je systém rovníc, podľa ktorých sa pohybujú častice v konzervatívnom poli. v 1D je to rovnica

$$m\ddot{x} = -\frac{\mathrm{d}U(x)}{\mathrm{d}x},$$

ktorá má prvý integrál (pohybu) $\Theta(x, v) = \frac{mv^2}{2} + U(x)$ =konšt., kde $v(t) = \dot{x}(t)$, vyjadrujúci celkovú energiu systému.

Definícia 2.3.2.

Prvým integrálom sústavy (1.6) na otvorenej množine $\Omega_1 \subset \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ nazývame takú funkciu $\Theta \in C^1(\Omega_1, \mathbb{R})$, pre ktorú platí: Ak je $\mathbf{y}(t), t \in I$ riešenie na Ω_1 sústavy (1.6), potom je funkcia $\tilde{\Theta}(t) := \Theta(t, \mathbf{y}(t))$ konštantná na intervale I.

Príklad 2.3.3.

Uvažujme sústavu

$$x' = y, y' = -x. \tag{2.6}$$

Zrejme $x^2 + y^2 = c$ pre riešenie (x, y) a teda prvým integrálom danej sústavy je valec a integrálne krivky tvoria skrutkovice na ňom, viď. obrázky 2.1(a), 2.1(b).

Najprv si uvedieme tvrdenie, ktoré je často prakticky využívané pri riešení nelineárnych systémov a vo svojej podstate súvisí s prvým integrálom špeciálneho systému.

Veta 2.3.4.

Nech f, g sú spojité funkcie, $x, y : (a, b) \to \mathbb{R}$, $t_0 \in (a, b)$, $f(x(t_0), y(t_0)) \neq 0$.

1. Potom existuje okolie U bodu t_0 také, že ak (x, y) je riešenie sústavy
$$x' = f(x, y), \quad y' = g(x, y)$$
na U, potom je $\tilde{y} = y \circ x^{-1}$ na $x(U)$ riešením rovnice
$$\frac{\mathrm{d}\tilde{y}}{\mathrm{d}z} = \frac{g(z, \tilde{y})}{f(z, \tilde{y})}, \quad \tilde{y}(x(t_0)) = y(t_0). \tag{2.7}$$
2. Pre každé okolie U bodu t_0 platí, že pokiaľ $\tilde{y}$ je riešením rovnice (2.7) na $x(U)$ a x je riešením rovnice $x' = f(x, \tilde{y}(x))$ na U, potom funkcia $\tilde{y} \circ x$ je riešením rovnice $y' = g(x, y)$ na U.

Všimnime si, že rovnicu (2.7) získame formálnym predelením rovníc daného planárneho systému. Veta v podstate hovorí, že ak chceme nájsť riešenia danej sústavy, môžeme najprv vyriešiť rovnicu (2.7), ktorá nám dá orbity riešení vo fázovej rovine, a potom dopočítať závislosť na t.

Použitím pravidla o derivovaní zloženej funkcie dostaneme nasledujúcu lemu, ktorá je užitočná a dôležitá v tom, že funkcii Θ môžeme rozhodnúť, či je (nie je) prvým integrálom bez toho, aby sme poznali riešenie.

Lema 2.3.5 (Nutná a postačujúca podmienka)**.**

Ak je pravá strana $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ sústavy (1.6) spojitá na $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$, potom funkcia $\Theta \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ je jej prvým integrálom na $\Omega \Leftrightarrow$ ak platí
$$\frac{\partial \Theta(t, \mathbf{y})}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \Theta(t, \mathbf{y})}{\partial y_j} f_j(t, \mathbf{y}) = 0, \quad \forall (t, \mathbf{y}) \in \Omega \tag{2.8}$$

Je to fakticky parciálna diferenciálna rovnica prvého rádu pre funkciu Θ. Takže je blízky vzťah medzi nimi a sústavami obyčajných diferenciálnych rovníc prvého rádu. Ak máme autonómny systém, potom táto podmienka hovorí, že gradient prvého integrálu je kolmý na vektorové pole **f** (na pravú stranu systému).

Poznámka 2.3.6.

Konštantné prvé integrály sú nezaujímavé. Nekonštantné prvé integrály definované na celej oblasti Ω existujú zriedka. Zvláštnu dôležitosť majú prvé integrály nezávisiace explicitne na t.

Príklad 2.3.7.

Uvažujme sústavu

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 - y_3, \\ y_2' &= y_3 - y_1, \\ y_3' &= y_1 - y_2. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Sčítaním týchto rovníc dostaneme $(y_1 + y_2 + y_3)' = 0$. To znamená, že funkcia $\Theta_1(\mathbf{y}) = y_1 + y_2 + y_3$ je prvými integrálom sústavy (2.9). Iný prvý integrál je $\Theta_2(\mathbf{y}) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$. Ako ho možno nájsť ?

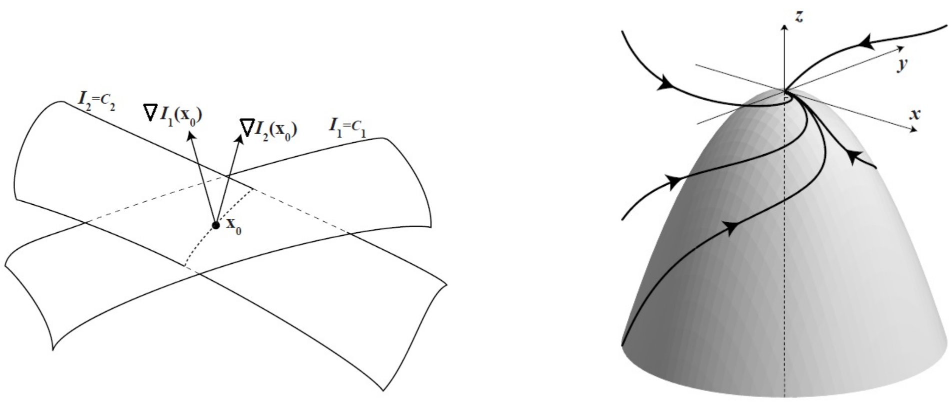
Poznámka 2.3.8.

Je zrejmé, že ak sú $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_k$ prvé integrály sústavy (1.6), potom aj $\Psi\left(\Theta_1(t, \mathbf{y}), \Theta_2(t, \mathbf{y}), \ldots, \Theta_k(t, \mathbf{y})\right)$ ním je, pričom Ψ je ľubovoľná spojite diferencovateľná funkcia k premenných. Tento integrál nám ale nedáva žiadnu ďalšiu informáciu o riešení v porovnaní s informáciou, ktorú nám dávajú prvé integrály $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_k$.

Ak chceme nájsť riešenie sústavy (1.6) pomocou prvých integrálov je podstatné, aby boli nezávislé na množine Ω.

Definícia 2.3.9.

Hovoríme, že prvé integrály $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_k$, $k \le n$ sú nezávislé na množine Ω, ak Ostrogradského-Jacobiho matica $\Theta_{\mathbf{y}}'$ má plnú hodnosť k pre všetky $(t, \mathbf{y}) \in \Omega$.



(a) Nezávislosť prvých integrálov - 2 konkrétne hladiny a ich prienik v bode x_0.

(b) Integrály z príkladu 2.3.10. Počiatok je globálny atraktor, tj. pre $t \to \infty$ tam končia všetky trajektórie (dosahujúc hladinu $I_1 = 0$).

Obr. 2.2: Prvé integrály.

Príklad 2.3.10 (Rabinovichov systém)**.**

Nasledujúci diferenciálny systém tvorí parametrický model, ktorý popisuje interakcie troch kvázi-synchrónnych vĺn v plazme :

$$\dot{x} = -2y^2 + \gamma x + z - \delta,$$
$$\dot{y} = 2xy + \gamma y - \delta x,$$
$$\dot{z} = -2z(x+1), \tag{2.10}$$

kde $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Nájsť prvé integrály pre takéto systémy nemusí byť vôbec jednoduché. Špeciálne pre $\gamma = 0, \delta = 1$ existujú dva explicitne závisiace na t prvé integrály

$$I_1 = (x^2 + y^2 + z)\mathrm{e}^{2t}, \quad I_2 = zy\mathrm{e}^{3t}.$$

Presvedčte sa o tom ! Pre $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ sú ich gradienty lineárne nezávislé. Taktiež sa môžete presvedčiť, že pre $\gamma = 0$ je $z(y - \delta/2)\mathrm{e}^{2t}$ ďalším prvým integrálom.

Problém 2.3.11.

Ukážte, že existencia lineárneho prvého integrálu pre lineárny homogénny systém s konštantnými koeficientami korešponduje s jeho degenerovanosťou, tj. systém (2.4) má lineárny prvý integrál $I(\mathbf{y}) = \mathbf{b} \cdot \mathbf{y}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n \iff \det \mathbf{A} = 0$.

2.4. Gradientné a Hamiltonove systémy

Príklad 2.4.1.

Vo fyzike je konzervatívny systém s jedným stupňom voľnosti popísaný rovnicou typu $\ddot{x} = g(x)$. Celková mechanická energia $H = T + U = \frac{\dot{x}^2}{2} - \int_0^x g(s)\,\mathrm{d}s$ je prvým integrálom (súčet kinetickej a potenciálnej energie systému). Prislúchajúci systém diferenciálnych rovníc je príkladom všeobecného Hamiltonovho systému a prvý integrál sa v tomto prípade nazýva Hamiltonova funkcia.

Nasledujúci diferenciálny systém súvisí s hamiltonovskou formuláciou mechaniky, ktorá je všeobecnejšia než lagrangeovská, z ktorej pôvodne vychádzala. Hamiltonova funkcia (súčet kinetickej a potenciálnej energie) mechanického systému s n stupňami voľnosti je definovaná vzťahom:

$$H(p_1, p_2, ...p_n, q_1, q_2, ...q_n, t) = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i\, p_i - L(q_1, q_2, ...q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_n, t),$$

kde L je Lagrangeova funkcia systému. Platí $p_i = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i}$ a Hamiltonova funkcia je vlastne Legendreova transformácia lagrangiánu. Tento dynamický systém opisuje vývoj fyzikálnych systémov ako napríklad planetárny systém alebo elektrón v elektromagnetickom poli.

Hamiltonove kanonické rovnice:

Nech $\mathcal{H}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$ je diferencovateľná funkcia. Nasledujúce rovnice tvoria pre mechanický systém s n stupňami voľnosti sústavu $2n$ diferenciálnych rovníc prvého rádu pre $2n$ neznámych funkcií času $q_i(t), p_i(t), i = 1, 2, ..., n$, kde q_i sú zovšeobecnené súradnice a p_i sú zovšeobecnené hybnosti.

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{p} &= -\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}\mathcal{H}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) = \mathbf{X} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{q} &= +\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\mathcal{H}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) = \mathbf{Y} \end{aligned} \tag{2.11}$$

Veta 2.4.2 (Zákon zachovania energie)**.**

Ak funkcia $\mathcal{H}$ nezávisí explicitne na t, potom je prvým integrálom systému (2.11), tj. $\mathcal{H}(\mathbf{p}(t), \mathbf{q}(t)) = k,\ k \in \mathbb{R}$ na nejakom intervale $I \subseteq \mathbb{R}$.

Dôsledok tejto vety je ten, že pre každú trajektóriu γ tohto systému existuje konštanta $k \in \mathbb{R}$ taká, že γ je súvislou komponentou hladiny funkcie $\mathcal{H}$, tj. množiny $\mathcal{H}^{-1}(k)$. Fázový portrét možno teda zistiť analýzou takýchto hladín funkcie $\mathcal{H}$. Zrejme nutnou podmienkou pre systém (2.11) je $\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\mathbf{X} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}\mathbf{Y} = 0$ (a aj postačujúcou v prípade systému 2 rovníc). Teda divergencia Hamiltonovho poľa $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ je nulová. Z toho máme (keďže to platí pre každé solenoidálne pole) nasledujúcu vetu.

Veta 2.4.3 (Liouville)**.**

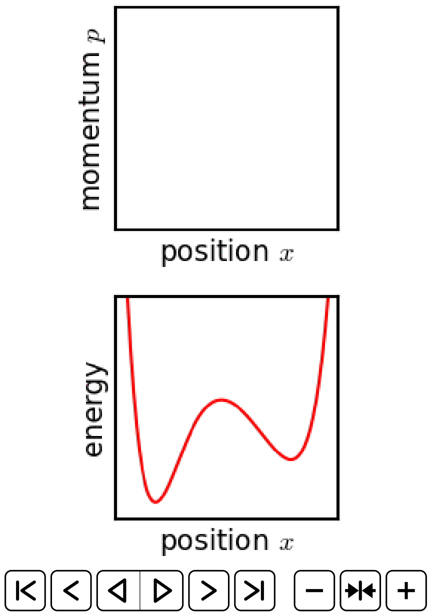
Nech $D_0 \subset \mathbb{R}^k$ je ohraničená oblasť vo fázovom priestore systému $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ a ϕ_t je ním generovaný (časovo závislý) fázový tok[a]. Potom pre $D_t := \phi_t(D_0)$ platí

$$\frac{\mathrm{d}\lambda_k(t)}{\mathrm{d}t} = \int_{D_t} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}(t, \mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

[a] T.j. riešenie závislé na počiatočnom stave

Dôsledok 2.4.4.

Hamiltonove polia zachovávajú objem (vo fázovom priestore).



Obr. 2.3: Vývoj ensemblu klasického konzervatívneho systému vo fázovom priestore (hore). Každý systém pozostáva z jednej hmotnej častice v jednorozmernej potenciálovej jame (červená krivka). Spočiatku kompaktný ensemble v priebehu času začne víriť.
Ensemble je myslená množina systémov s rovnakými vonkajšími parametrami (napr . objem nádoby, gravitačné polia atď.), ale s rôznymi mikrostavmi - pojem štatistickej fyziky.

Problém 2.4.5.

Ukážte, že v 2D prípade je nutná podmienka aj postačujúcou.
Ukážte, že nutná podmienka pre nasledujúci systém je splnená, avšak systém nie je Hamiltonov.

$$q_1'' = -q_1, \quad q_2'' = q_1.$$

Príklad 2.4.6 (Klasické príklady).

Ukážeme, že systém

$$\begin{aligned} x' &= y(13 - x^2 - y^2), \\ y' &= 12 - x(13 - x^2 - y^2), \end{aligned} \tag{2.12}$$

je Hamiltonov. Máme $\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{X} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{Y} = -2xy + 2xy = 0$ a teda podmienka je splnená. Nájdite $\mathcal{H}$ tohto systému a načrtnite fázový diagram !

Príklad 2.4.7.

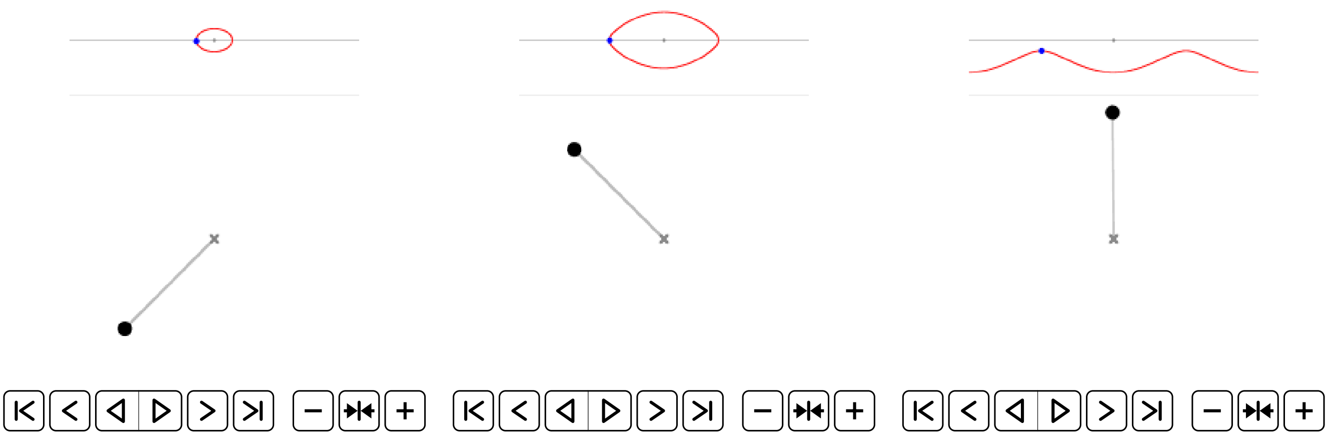
1. Hamiltonova funkcia pre jednorozmerný pohyb voľnej častice (HB): $\mathcal{H} = p\dot{q} - L = \frac{p^2}{m} - \frac{1}{2}m\dot{q}^2 = \frac{p^2}{2m}$
2. Hamiltonova funkcia častice s nábojom q v elektromagnetickom poli s elektrickým potenciálom φ (magnetický vektorový potenciál v nej nevystupuje): $\mathcal{H} = \frac{1}{2}mv^2 + q\varphi$
3. Hamiltonova funkcia relativistickej častice (pre nenabitú časticu odpadá člen s q): $\mathcal{H} = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + q\varphi$

Hamiltonove systémy môžu mať relatívne zložité vlastnosti. Jednoduchšie vlastnosti trajektórií majú tzv. gradientné systémy.

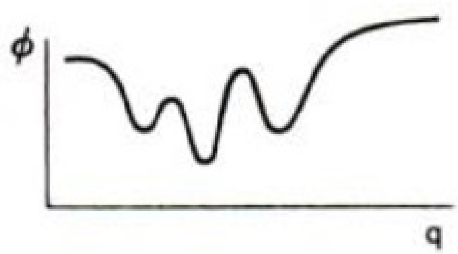
Gradientný systém:

Nech $U \in C^k(\Omega, \mathbb{R})$, $k \geq 1$, kde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otvorená množina. Gradientný systém na Ω je systém tvaru

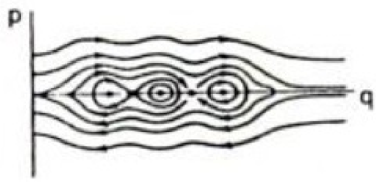
$$\mathbf{y}' = -\nabla U(\mathbf{y}). \tag{2.13}$$



Obr. 2.4: Matematické kyvadlo s počiatočnými uhlami 45°, 135° a 180°.



(a) Potenciál.



(b) Fázový tok.

Obr. 2.5: Vzťah potenciálu a fázového portrétu.

Problém 2.4.8.

Potenciál (konzervatívneho) elektrostatického poľa možno chápať ako potenciálnu energiu jednotkového náboja. Záporný gradient potenciálu je rovný intenzite elektrického poľa, tzn. $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\nabla\varphi(\boldsymbol{r})$. Čo predstavujú krivky vo fázovom portréte rovnice $\boldsymbol{r}' = -\nabla\varphi(\boldsymbol{r})$. ?

Problém 2.4.9.

Nech $W \in C^2(U, \mathbb{R})$, určte nutnú podmienku na to, aby systém bol gradientný. Ako je to s postačujúcou podmienkou ?
Ktoré lineárne systémy s konštantnými koeficientami sú gradientné?

Veta 2.4.10.

Nech $\mathbf{y}$ je riešenie sústavy (2.13), potom $U(\mathbf{y}(t))$ je nerastúca funkcia.

Všimnime si, že $\frac{\mathrm{d}U(\mathbf{y}(t))}{\mathrm{d}t} = -\langle -\nabla U(\mathbf{y}(t)), \mathbf{y}'(t)\rangle = -\|\nabla U(\mathbf{y}(t))\|^2 \leq 0$. Ak je $\nabla U(\mathbf{y}) = \mathbf{0}$, potom je orbita ekvilibrium. V opačnom prípade platí striktná nerovnosť, teda naozaj U klesá pozdĺž trajektórií.

Dôsledok 2.4.11.

Gradientný systém nemá periodické trajektórie.

Veta 2.4.12 (Ortogonalita)**.**

Ak je systém (2.11) autonómny Hamiltonov systém s n-stupňami voľnosti, potom je systém kolmý na (2.11) gradientný v $\mathbb{R}^{2n}$, teda (2.13) s $U = H$ a $\mathbf{y} = (\mathbf{p}, \mathbf{q})$, a jeho trajektórie pretínajú plochy $\mathcal{H} = kont.$ kolmo.

Poznámka 2.4.13.

V prípade dvojrozmerných systémov je gradientný systém v tvare

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \end{pmatrix}$$

a Hamiltonov systém v tvare

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Podobne vieme všeobecne zapísať Hamiltonov systém ako

$$\mathbf{y}' = J\nabla\mathcal{H}(\mathbf{y}),$$

kde $\mathbf{y} = (\mathbf{p}, \mathbf{q})$ a $J = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$ a (párny) gradientný systém ako $\mathbf{y}' = -I_{2n}\nabla U(\mathbf{y})$. Z tohto je zaujímavé, že aj geometria je iná pre tieto dva typy systémov. Kým gradientné systémy sú asociované s varietami s Riemannovskou metrikou, pre hamiltonovské to nahrádzame tzv. symplektickou formou.